

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

**Kurt Bohner**

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

**Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Ronald Deusch**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Stefan Rosner**

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Beratende Tätigkeit:

**Norbert Lengersdorf**

Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an [copyright@merkur-verlag.de](mailto:copyright@merkur-verlag.de).

Die in diesem Buch zitierten Internetseite wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: März 2024

\*\*\*\*\*

2. Auflage 2024

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

Merkur-Nr. 0666-02

ISBN 978-3-8120-1065-8

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen, und den Beruflichen Gymnasien in NRW der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff: Analysis (Differenzial- und Integralrechnung), Stochastik (Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung, Normalverteilung, Hypothesentest), Lineare Algebra (Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und ihre Anwendungen, Leontiefmodell, Lineare Optimierung). Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife führen, vom Juni 2007 und vom Mai 2008.

Ab dem Abitur 2026 ist zur Bearbeitung des Aufgabenteils B nur noch ein modulares Mathematiksystem (MMS) zugelassen. Dieser Änderung wird vollumfänglich Rechnung getragen.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards vom Juli 2014 für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-1666-5) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1113-6) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit der **Modellierung einer Situation**, die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbständig bearbeiten.

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

**Modellierung einer Situation**

Für den Produktlebenszyklus des neu entwickelten Schmerzmittel-Narkotika gibt die Marketingabteilung von der Fakultät in mit  $u(t) = 0,6t^2 + 10t$  aus. Diese beschreibt den Umsatz in GE pro Monat in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Monaten.



a) Berechnen Sie die Höhe des Maximums.



**Beispiel 2**

Die Gewinnfunktionsformel  $K$  ist gegeben durch  $K(x) = x^3 - x^2 - 2x + 4$ ,  $x$  in ME,  $K(x)$  in GE.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von  $K$  keinen Extrempunkt besitzt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im wirtschaftlichen Sinne.

b) Bestimmen Sie die Kostenänderung bei einer Produktion von 2 ME. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

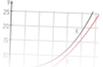
**Lösung**

a) Ableitungen:  $K'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ,  $K''(x) = 6x - 2$   
Bedingung für Extrempunkte:  $K'(x) = 0$ ,  $K''(x) \neq 0$   
Notwendige Bedingung für Extrempunkte:  $K'(x) = 0$

$$3x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$
$$D = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} < 0$$

Diese Gleichung hat wegen  $\Delta < 0$  keine Lösung,  $K$  hat also keine Extrempunkte.

Mit wachsenden Produktionszahlen wachsen auch die Kosten. Eine Kostenfunktion ist (stetig) messbar, wenn die Steigungen der Kostenkurve stets stetig positiv ( $K'(x) > 0$ ) sind.



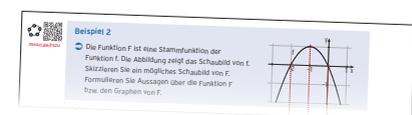
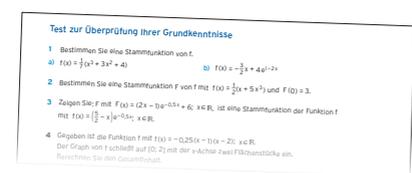
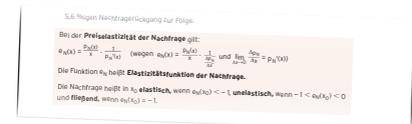
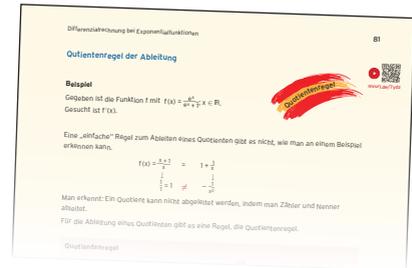
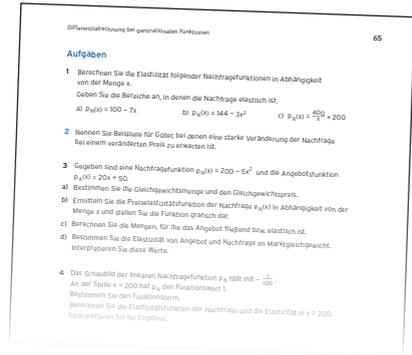
Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;

- blau:** Lösung ohne Hilfsmittel
- schwarz:** keine Vorgabe zur Lösung

Seiten, die Themen und Aufgaben nur für den Leistungskurs beinhalten, sind farblich gelb hinterlegt.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



**Videos** dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Differenzialrechnung</b>		<b>11</b>
1	Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen .....	11
1.1	Stetigkeit und Differenzierbarkeit .....	12
1.2	Monotonie .....	15
1.3	Extrempunkte .....	19
1.4	Wendepunkte .....	26
1.5	Beispiele zur Kurvenuntersuchung .....	31
1.6	Untersuchung einer Kurvenschar .....	35
1.7	Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung .....	41
1.7.1	Kurvenuntersuchung in wirtschaftlichen Anwendungen .....	42
1.7.2	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen .....	67
1.7.3	Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung .....	73
2	Differenzialrechnung bei Exponentialfunktionen .....	76
2.1	Ableitungsregeln .....	77
2.2	Kurvenuntersuchung .....	84
2.3	Exponentialfunktionen in Anwendungen .....	90
<b>II Integralrechnung</b>		<b>101</b>
1	Einführung .....	102
2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	104
3	Das bestimmte Integral .....	115
4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung .....	123
4.1	Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse .....	123
4.2	Fläche zwischen zwei Graphen .....	130
5	Anwendung der Integralrechnung in der Wirtschaft .....	136
<b>III Stochastik</b>		<b>148</b>
1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit .....	148
1.1	Zufallsexperiment .....	149
1.1.1	Einstufiges Zufallsexperiment .....	149
1.1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment .....	151
1.2	Ereignisse .....	153
1.3	Wahrscheinlichkeit .....	158
1.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit .....	158
1.3.2	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment) .....	162
1.3.3	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten .....	165
1.3.4	Additionssatz .....	170
1.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit .....	172
1.4	Kombinatorik .....	180
1.4.1	Produktregel .....	180
1.4.2	Stichproben .....	181

1.5	Zufallsvariable	191
1.5.1	Einführung	191
1.5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung	194
1.5.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	197
1.5.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen	202
2	Binomialverteilung	208
2.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten	209
2.2	Die Bernoulli-Formel	211
2.3	Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung	220
3	Normalverteilung	228
3.1	Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung	228
3.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung	230
3.3	Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	237
4	Testen von Hypothesen	243
4.1	Einseitiger Hypothesentest	243
4.2	Zweiseitiger Hypothesentest	252

## IV Lineare Algebra

257

1	Lineare Gleichungssysteme	257
1.1	Einführung	258
1.2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	260
1.2.1	Das LGS ist eindeutig lösbar	260
1.2.2	Das LGS ist unlösbar	264
1.2.3	Das LGS ist mehrdeutig lösbar	265
1.3	Der Rang einer Matrix	268
1.4	Lineare Abhängigkeit	272
2	Rechenoperationen mit Matrizen	274
2.1	Rechnen mit Matrizen	275
2.1.1	Einführung	275
2.1.2	Addition und skalare Multiplikation	277
2.1.3	Multiplikation von Matrizen	281
2.2	Inverse Matrix	288
2.2.1	Einführung	288
2.2.2	Berechnung der inversen Matrix	289
2.3	Matrizengleichungen	293
2.3.1	Einführung	293
2.3.2	Auflösung von Matrizengleichungen	294
3	Lineare Verflechtung bei mehrstufigen Produktionsprozessen	298
3.1	Produktionsprozesse	299
3.2	Verflechtungsmatrizen	302
3.3	Produktions- und Verbrauchsvektoren	308
3.4	Kosten	315
4	Das Leontiefmodell	328
4.1	Beschreibung des Leontiefmodells	329
4.2	Inputmatrix	331
4.3	Problemstellungen beim Leontiefmodell	337

5	Stochastische Matrizen .....	346
5.1	Einführung .....	347
5.2	Stochastische Übergangsprozesse .....	348
5.3	Stabilitätsvektor und Grenzmatrix .....	356
6	Lineare Optimierung .....	366
6.1	Grafische Lösung von linearen Ungleichungssystemen .....	367
6.2	Grafische Lösung für Optimierungsaufgaben .....	370
6.2.1	Die Optimierungsaufgabe hat eine eindeutige Lösung .....	370
6.2.2	Die Optimierungsaufgabe hat keine Lösung .....	378
6.2.3	Die Optimierungsaufgabe hat eine mehrdeutige Lösung .....	380
6.3	Algebraische Lösungsverfahren für Optimierungsaufgaben .....	385
6.3.1	Eckpunktberechnungsmethode .....	385
6.3.2	Simplexverfahren .....	386
<b>Anhang</b>		<b>404</b>
1	Operatoren .....	404
2	Lösungen der Modellierungen und Tests .....	407
3	Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten .....	433
4	Mathematische Zeichen .....	438
5	Stichwortverzeichnis .....	439
	Abbildungsverzeichnis .....	443